



# **EGZAMIN GIMNAZJALNY W ROKU SZKOLNYM 2013/2014**

## **CZĘŚĆ MATEMATYCZNO-PRZYRODNICZA MATEMATYKA**

### **ROZWIĄZANIA ZADAŃ I SCHEMATY PUNKTOWANIA**

**ARKUSZ GM-M1-142**

**KWIECIEŃ 2014**

*Liczba punktów za zadania zamknięte i otwarte: 28*

**Zadania zamknięte**

| Numer zadania | Poprawna odpowiedź | Zasady przyznawania punktów  |
|---------------|--------------------|--|
| 1.            | C                  | <ul style="list-style-type: none"> <li>• poprawna odpowiedź – 1 pkt</li> <li>• błędna odpowiedź lub brak odpowiedzi – 0 pkt</li> </ul> |
| 2.            | D                  |  |
| 3.            | PP                 |  |
| 4.            | B                  |  |
| 5.            | B                  |  |
| 6.            | D                  |  |
| 7.            | A                  |  |
| 8.            | B                  |  |
| 9.            | B                  |  |
| 10.           | D                  |  |
| 11.           | C                  |  |
| 12.           | A                  |  |
| 13.           | B                  |  |
| 14.           | FF                 |  |
| 15.           | D                  |  |
| 16.           | PP                 |  |
| 17.           | C                  |  |
| 18.           | A                  |  |
| 19.           | NC                 |  |
| 20.           | C                  |  |

**Zadania otwarte**

**UWAGA**

- Za każde inne niż przedstawione poprawne rozwiązanie przyznajemy maksymalną liczbę punktów.
- Jeśli na jakimkolwiek etapie rozwiązania zadania popełniono jeden lub więcej błędów rachunkowych, ale zastosowane metody były poprawne, to obniżmy ocenę całego rozwiązania o 1 punkt.

### Zadanie 21. (0–3)

#### Przykładowe sposoby rozwiązania

##### I sposób

Koszt korzystania z basenu bez karty rabatowej:

$$12 \cdot 16 = 192 \text{ (zł)}$$

Koszt korzystania z basenu z kartą rabatową:

$$8 \cdot 10 + 9 \cdot 6 = 80 + 54 = 134 \text{ (zł)}$$

$$50 + 134 = 184 \text{ (zł)}$$

$$184 \text{ zł} < 192 \text{ zł}$$

Odpowiedź. Zakup karty rabatowej był dla Wojtka opłacalny.

##### II sposób

Kwota zaoszczędzona dzięki zakupowi karty rabatowej:

$$(12 - 8) \cdot 10 = 40 \text{ (zł)}$$

$$(12 - 9) \cdot 6 = 18 \text{ (zł)}$$

$$40 + 18 = 58 \text{ (zł)}$$

Koszt zakupu karty jest równy 50 zł.

$$50 \text{ zł} < 58 \text{ zł}$$

Koszt zakupu karty rabatowej jest niższy niż kwota zaoszczędzona przy opłacie za 16 godzin pływania.

Odpowiedź. Zakup karty rabatowej był opłacalny.

#### Poziom wykonania

##### **P<sub>6</sub> – 3 punkty – pełne rozwiązanie**

zapisanie wniosku wynikającego z poprawnych obliczeń

##### **P<sub>5,4</sub> – 2 punkty – zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale dalsza część rozwiązania zawiera usterki (błędy rachunkowe, niedokonanie wyboru właściwych rozwiązań itp.)**

obliczenie kosztów korzystania z basenu w obu przypadkach, ale bez zapisania wniosku (bez porównania liczb 192 i 184)

lub

poprawny sposób obliczenia kosztu korzystania z basenu przy zakupie karty rabatowej z uwzględnieniem kosztu jej zakupu i poprawny sposób obliczenia kosztu korzystania z basenu bez karty rabatowej

lub

obliczenie kwoty zaoszczędzonej dzięki zakupowi karty rabatowej bez uwzględnienia kosztu zakupu karty (58 zł)

##### **P<sub>2</sub> – 1 punkt – dokonano istotnego postępu, ale zasadnicze trudności zadania nie zostały pokonane**

obliczenie kosztu korzystania z basenu bez karty rabatowej (192 zł)

lub

obliczenie kosztu korzystania z basenu z kartą rabatową bez uwzględnienia kosztu zakupu karty (134 zł)

lub

poprawny sposób obliczenia kosztu korzystania z basenu z kartą rabatową z uwzględnieniem kosztu zakupu karty

lub

poprawny sposób obliczenia kwoty zaoszczędzonej dzięki zakupowi karty rabatowej

**P<sub>0</sub> – 0 punktów – rozwiązanie niestanowiące postępu**

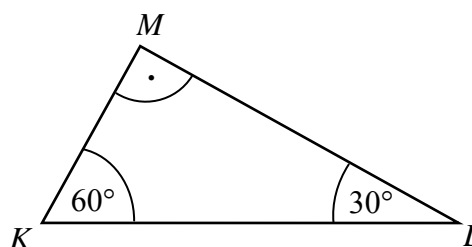
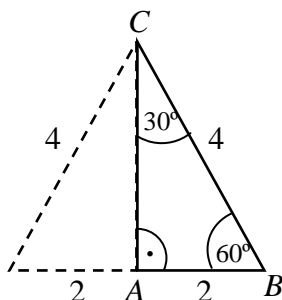
rozwiązanie błędne lub brak rozwiązania

**Zadanie 22. (0–2)**

**Przykładowe sposoby rozwiązania**

**I sposób**

$$|\sphericalangle KLM| = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$



W trójkącie  $ABC$  przyprostokątna  $AB$  jest połową przeciwprostokątnej  $BC$ , co oznacza, że trójkąt  $ABC$  jest połową trójkąta równobocznego, czyli jego kąty ostre mają miary  $30^\circ$  i  $60^\circ$ . Miary kątów tych trójkątów są równe, zatem trójkąty  $ABC$  i  $KLM$  są podobne.

**II sposób**

Obliczamy długość boku  $AC$

$$|AC| = 2\sqrt{3}$$

Po wprowadzeniu oznaczeń uwzględniających zależności:  $|KM| = x$ ,  $|ML| = x\sqrt{3}$ ,  $|KL| = 2x$ ,  $|AC| = 2\sqrt{3}$  i obliczeniu stosunku odpowiednich boków otrzymujemy:

$$\frac{|KL|}{|CB|} = \frac{2x}{4} = \frac{x}{2}, \quad \frac{|KM|}{|AB|} = \frac{x}{2}, \quad \frac{|ML|}{|AC|} = \frac{x\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{x}{2}$$

Wniosek

Odpowiednie boki trójkątów  $KLM$  i  $ABC$  są proporcjonalne, zatem trójkąty są podobne.

**Poziom wykonania**

**P<sub>6</sub> – 2 punkty – pełne rozwiązanie**

uzasadnienie, że trójkąty są podobne na podstawie równości kątów (I sposób)

lub

uzasadnienie, że długości odpowiednich boków trójkątów są proporcjonalne (II sposób)

- P<sub>4</sub> – 1 punkt – zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale rozwiązanie nie zostało dokończzone lub dalsza część rozwiązania zawiera poważne błędy merytoryczne**  
 zapisanie miary co najmniej jednego z kątów ostrych w trójkącie  $ABC$  oraz stwierdzenie, że trójkąty są podobne  
 lub  
 uzasadnienie, że w trójkącie  $ABC$  jeden z kątów ostrych ma miarę  $60^\circ$  ( $30^\circ$ )  
 lub  
 zapisanie zależności między długościami boków trójkąta  $KLM$  ( $x, x\sqrt{3}, 2x$ )

- P<sub>0</sub> – 0 punktów – rozwiązanie niestanowiące postępu**  
 rozwiązanie błędne lub brak rozwiązania

### Zadanie 23. (0–3)

#### Przykładowe sposoby rozwiązania

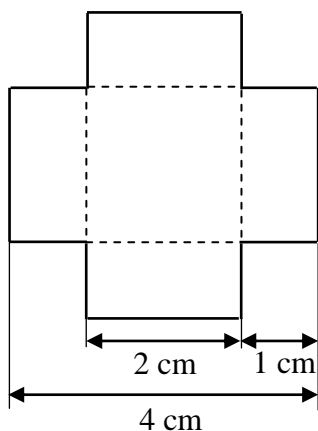
##### I sposób

$a$  – długość krawędzi sześcianu

$$a = 4 \text{ cm}$$

Pole powierzchni sześcianu jest równe

$$P_c = 4 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm} \cdot 6 = 96 \text{ cm}^2$$



Pole jednej ściany bryły powstałej po usunięciu z narożników małych sześcianów jest równe

$$P_1 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 4 = 2(2 + 1 \cdot 4) = 2 \cdot 6 = 12 \text{ (cm}^2\text{)}$$

**lub**

$$P_1 = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 1 \cdot 2 = 8 + 4 = 12 \text{ (cm}^2\text{)}$$

**lub**

$$P_1 = 4 \cdot 4 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 16 - 4 = 12 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Jest 6 takich ścian, zatem ich pole jest równe

$$P = 6 \cdot 12 \text{ cm}^2 = 72 \text{ cm}^2$$

W każdym narożniku powstałej bryły są trzy ściany o polu  $1 \text{ cm}^2$  każda, więc pole powierzchni tych ścian w ośmiu narożnikach jest równe  $8 \cdot 3 \text{ cm}^2 = 24 \text{ cm}^2$ .

Pole powierzchni całkowitej powstałej bryły jest równe

$$P_c = 72 + 24 = 96 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Odpowiedź. Pole powierzchni powstałej bryły jest równe polu sześcianu.

## II sposób

Długość krawędzi sześcianu jest równa 4 cm. Pole powierzchni jednej ściany sześcianu jest równe  $16 \text{ cm}^2$ , a całego sześcianu  $P_c = 16 \text{ cm}^2 \cdot 6 = 96 \text{ cm}^2$ .

Jeżeli z każdego narożnika dużego sześcianu usuniemy po jednym małym sześcianie, to pole powierzchni każdej ściany jest mniejsze o  $4 \text{ cm}^2$  i wynosi  $12 \text{ cm}^2$ .

Zatem pole powierzchni wszystkich takich ścian jest równe:  $6 \cdot 12 \text{ cm}^2 = 72 \text{ cm}^2$ .

W ośmiu narożnikach powstałej bryły są po trzy ściany o polu  $1 \text{ cm}^2$  każda, więc pole powierzchni wszystkich tych ścian jest równe  $8 \cdot 3 \text{ cm}^2 = 24 \text{ cm}^2$ .

Zatem pole powierzchni całkowitej powstałej bryły jest równe  $P_c = 72 + 24 = 96 \text{ (cm}^2\text{)}$ .

Odpowiedź. Pole powierzchni powstałej bryły jest równe polu sześcianu.

## III sposób

Sześcian składa się z 64 małych sześcianów o krawędzi 1 cm każdy, więc krawędź tego sześcianu ma długość 4 cm. Pole powierzchni jednej ściany sześcianu jest równe  $16 \text{ cm}^2$ , a całego sześcianu  $P_c = 16 \text{ cm}^2 \cdot 6 = 96 \text{ cm}^2$ .

Jeżeli z każdego narożnika dużego sześcianu usuniemy po jednym małym sześcianie, to pole powierzchni całkowitej nie zmieni się, ponieważ liczba ścian usuniętych i pozostałych w każdym narożniku powstałej bryły jest taka sama.

Zatem pole powierzchni powstałej bryły jest równe  $96 \text{ cm}^2$ .

Odpowiedź. Pola powierzchni obu brył są równe.

## Poziom wykonania

### **P<sub>6</sub> – 3 punkty – pełne rozwiązanie**

obliczenie pól powierzchni obu brył i zapisanie wniosku o równości pól  
lub

obliczenie pola powierzchni sześcianu ( $96 \text{ cm}^2$ ) i uzasadnienie, że pole powierzchni powstałej bryły jest równe polu powierzchni sześcianu

### **P<sub>4</sub> – 2 punkty – zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale rozwiązanie nie zostało dokończony lub dalsza część rozwiązania zawiera poważne błędy merytoryczne**

obliczenie pola powierzchni powstałej bryły ( $96 \text{ cm}^2$ ), bez obliczenia pola powierzchni sześcianu

lub

obliczenie pola powierzchni sześcianu ( $96 \text{ cm}^2$ ) i zapisanie wniosku o równości pól obu brył bez uzasadnienia

lub

obliczenie pola powierzchni sześcianu ( $96 \text{ cm}^2$ ) i pola powierzchni ścian w kształcie „krzyża” w powstałej bryle ( $72 \text{ cm}^2$ )

lub

obliczenie pola powierzchni sześcianu ( $96 \text{ cm}^2$ ) i pola powierzchni ścian w narożach powstałej bryły ( $24 \text{ cm}^2$ )

**P<sub>2</sub> – 1 punkt – dokonano istotnego postępu, ale zasadnicze trudności zadania nie zostały pokonane**

poprawny sposób obliczenia pola powierzchni sześcianu

lub

poprawny sposób obliczenia pola jednej ściany w kształcie „krzyża” w powstałej bryle

lub

poprawny sposób obliczenia pola powierzchni trzech ścian w narożu po usunięciu małego sześcianu

**P<sub>0</sub> – 0 punktów – rozwiązanie niestanowiące postępu**

rozwiązanie błędne lub brak rozwiązania